Вељко Ћировић

РЕШЕНИ ЗАДАЦИ
из математике за припрему такмичења
5. разред

▷ 1. Од цифара 3, 4, 5, 8 написати све троцифрене бројеве, чије се цифре међусобно разликују, а који су дељиви са 3.

Решење. Пошто такви бројеви морају имати збир цифара дељив са 3, то ћемо узети бројеве састављене од цифара 3, 4 и 5: 345, 354, 435, 453, 534, 543, затим све бројеве чије су цифре 3, 4 и 8: 348, 384, 438, 483, 834, 843. Дакле, таквих бројева има 12, и они су управо набројани. ♠

▷ 2. Поређати по величини следеће разломке $\frac{1}{51}, \frac{10}{503}, \frac{40}{2011}$.

Решење. Приметимо да нам овде решење доносе следећа проширења одговарајућих разломака:

$$\frac{1}{51} = \frac{40\cdot 1}{40\cdot 51} = \frac{40}{2040}, \frac{10}{503} = \frac{4\cdot 10}{4\cdot 503} = \frac{40}{2012}.$$

Па сада треба упоредити:

$$\frac{40}{2040}, \frac{40}{2012}, \frac{40}{2011}.$$

А пошто су нам бројиоци једнаки, то је редослед разломака следећи:

$$\frac{40}{2040} < \frac{40}{2012} < \frac{40}{2011}.♠$$

▷ 3. Колики угао заклапају на часовнику сатна и минутна казаљка у 8 сати и 20 минута?

Решење. Минутна казаљка за један сат направи пун круг, то јест направи угао од 360^o, па за један минут пређе $\frac{1}{60}$ круга, а то је угао од 6^o. Сатна иде много спорије, и за један минут пређе $\frac{1}{60}$ оног дела круга који иначе пређе за један сат, а то је

$$\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{12}\cdot 360^o = 30'.$$

Па, пошто сада знамо колико прелазе обе казаљке за које време, можемо прећи на рачун. За 20 минута минутна казаљка пређе $20\cdot 6^o = 120^o$, док мала за 8 сати и 20 минута пређе $8\cdot 30^o + 20\cdot 30' = 250^o$, и отуда добијамо да казаљке у 8 сати и 20 минута заклапају огао од $250 - 120 = 130^o$. Ово смо добили тако што смо израчунали колики је угао прешла сатна казаљка од 12 сати до траженог времена, и колики је прешла минутна од 12 сати до истог тог времена, и онда просто те од првог угла одузели вредност другог, иначе ти углови се и преклапају на једном делу, па је решење онај угао који представља разлику. ♠

▷ 4. Аритметичка средина осам различитих природних бројева је 16. Колики може бити највећи од тих бројева?

Решење. Претпоставимо да су то бројеви $n_1, n_2, ..., n_8 \in \mathbb{N}$. дато је да важи за аритметичку средину:

$$\frac{n_1 + n_2 + ... + n_8}{8} = 16,$$

па одавде добијамо да је збир тих нама непознатих бројева једнак $n_1+n_2+...+n_8 = 8\cdot 16 = 126$, и да би последњи број, то је наш n_8 био највећи, потребно је да збир преосталих 7 буде најмањи могући. А то ће се постићи када су првих седам одабраних бројева управо бројеви од 1 до 7. А њихов збир је $1+2+3+4+5+6+7=28$, па највећи одабрани број може да буде $126-28=98$. ♠

▷ 5. Додати по једну цифру испред и иза броја 2011 тако да се добије најмањи шестоцифрен број који је дељив са 18.

Решење. Број ће бити дељив са 18 ако је дељив са 2 и са 9 истовремено. Па то управо значи да нам тражени број мора бити дељив са тим бројевима, односно бити паран, тј. завршавати се на неки паран број, и имати збир цифара дељив са 9. Нека је тражени број састављен из следећих цифара $x2011y$, y треба бити паран, а x ћемо одабрати по услову да збир $x+2+0+1+1+y$ буде дељив са 9. Пошто нам се, уз ове услове, тражи и да добијени број буде најмањи такав, то пробајмо да ли је могуће да $x=1$? Ако је $x=1$ збир првих пет цифара овог броја је 5, па нам за $y=4$ то сев заједно даје и коначно решење овог задатка. Дакле, број 120114 је најмањи тражени број који је дељив са 18. ♠

▷ 6. Производ неких простих бројева је број 32048. Који број се добија када се ти прости бројеви саберу?

Решење. Позната је чињеница да се сваки сложен број може представити као производ простих. Када број 32048 раставимо на производ простих чинилаца добијамо: $32048 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2003$. Бројеви 2, 2, 2, 2 и 2003 су прости, а њихов збир је 2011! ♠

▷ 7. Акваријум је у облику квадра димензија $60cm$, $60cm$ и $40cm$ и напуњен је водом до врха. Колико пута се мора употребити посуда запремине од једног литра да би се испразнила трећина воде из акваријума?

Решење. Запремина акваријума је $60 \cdot 60 \cdot 40 = 144000cm^3 = 144dm^3 = 144$ литра. А трећина воде у њему је $144 : 3 = 48$ литара, па посуду треба употребити 48 пута. ♠

▷ 8. На Јордановом рођендану било 43 дечака и 32 девојчице, његових школских другара. Да ли је могуће да је сваки Јорданов гост срео међу осталим гостима тачно једанаесторо познаника из школе?

Решење. На рођендану је било $43+32=75$ гостију. Ако сваки гост познаје по једанаесторо других гостију то би било укупно познанстава:

$$(75 \cdot 11) : 2$$

а ово није цео број! Па услов задатка није могућ!

<u>Напомена.</u> У Изразу $(75 \cdot 11) : 2$ дељење са 2 је присутно зато што свако познанство између особа А и Б рачунамо само једном, иако у простом набрајању то познанство може бити препознато и као А-Б и Б-А, али пошто се ради о истим особама, онда је то једно једино познанство. Ово се често јавља у задацима сличног типа, па треба пажљиво уочити. ♠

▷ 9. При дељењу датог броја са 56 остатак је 35. Да ли је дати број дељив са 7?

Решење. Нека је бати број x. Услов задатка нам даје $x : 56 = q(35)$, где је q количник у овом дељењу. Последњи израз може се још записати и као $x = 56 \cdot q + 35$. А пошто су бројеви 56 и 35 дељиви са 7, то је са 7 дељив и збир $56 \cdot q + 35$, па је одговор на питање нашег задатка: Да! ♠

▷ 10. За два комплементна угла α и β познато је да је један од њих 8 пута већи од другог. Колики је, онда, угао γ који је суплементан већем од њих?

Решење. Дакле, $\alpha + \beta = 90^o$ и $\beta = 8 \cdot \alpha$, па када другу једнакост искористимо тако што је убацимо у прву, добићемо: $\alpha + \beta = \alpha + 8 \cdot \alpha = 9 \cdot \alpha = 90^o$, и отуда $\alpha = 10^o$. Због комплементности је $\beta = 90^o - 10^o = 80^o$. Па због суплементности већег од ових иглова и угла γ, имамо да је $\beta + \gamma = 180^o$, а одавде се добија $\gamma = 180^o - 80^o = 100^o$. ♠

▷ 11. Скуп A чине сви прости делиоци броја 2860. А скуп B чине бројеви који су једнаки производу тачно два елемента из скупа А. Одредити скуп B.

Решење. Растављајући број 2860 на производ простих чинилаца добијамо: $2860 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$. Дакле,

$$A = \{2, 5, 11, 13\}.$$

Производи по два елемента из скупа А су: $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 11 = 22$, $2 \cdot 13 = 26$, $5 \cdot 11 = 55$, $5 \cdot 13 = 65$, $11 \cdot 13 = 143$. Дакле, ових бројева је тачно 6 и они чине скуп $B = \{10, 22, 26, 55, 65, 143\}$. ♠

▷ 12. У равни су дате 3 различите кружнице и две различите праве. Колико највише пресечних тачака оне могу имати међусобно? Пресечна је тачка која је заједничка за две од ових фигура.

Решење. У оваквом задатку идеја нам је да направимо цртеж на коме ћемо покушати да "пресечемо" сваки објекат са сваким. Сваки круг се сече са сваким од по два остала и ту се добија 6 тражених тачака, сваку праву поставимо тако да сече сва три круга, и пошто их је две таквих тачака ће бити 2 пут по 6, тј 12. И још додамо 1 заједничку тачку ове две праве. Укупно оваквих тачака је 19. ♠

▷ 13. Одредити најмањи и највећи петоцифрени број који је дељив са 2010.

Решење. Као и обично у оаваквим задацима, у којима је дељивост у питању, представимо број 2010 као прозвод простих: $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Да би добили најмањи петоцифрен број који је дељив са 2010, помножимо га са 5, то је прост број и у резултату добијамо $2010 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \cdot 5 = 10050$. Побринимо се сада око највећег петоцифреног. Могу се на више начина доћи до тог решења, а једна од идеја је рецимо да нађемо најмањи шестоцифрени такав, па да од њега одузмемо 2010 и то би био тражени најбвећи петоцифрени број. Имамо да је $10 \cdot 10050 = 10 \cdot 5 \cdot 2010 = 100500$, и ово је очигледно најмањи шестоцифрен број дељив са 2010. Највећи петоцифрен биће: $100500 - 2010 = 98490$. $98490 : 2010 = 47$. Па је тиме задатак решен! ♠

▷ 14. Да ли је могуће само помоћу канти од 5 и 7 литара напунити водом канту која прима 4 литра?

Решење. Напунимо канту од 7 литара, па из ње узмемо 5 литара другом кантом, тако нам остане 2 литра и то сипамо у канту од 4 литра. Поновимо претходни поступак још једном и посао је завршен! Дакле, могуће је. ♠

▷ 15. Пет крава за десет дана попасе ливаду од 50 ари, колику ливаду ће попасти 50 крава за 50 дана?

Решење. У оваквим задацима потребно је из датих података извући закључак шта се дешава за један дан, а онда то искористити за тражење решења. Како 5 крава за 10 дана попасе ливаду од 50 ари, то се из датог да закључити да тих 5 крава за 1 дан попасе 5 (50 : 10) ари. А одатле ћемо имати да 50 крава (10 пута више) за један дан попасе 50 ари (10 пута више), и то значи да ће за 50 дана попасти ливаду од $50 \cdot 50 = 2500$ ари, тј. 25 хектара! ♠

▷ 16. Углови α и β су комплементни, а углови $2\cdot\alpha$ и 40^o су суплементни. Одредити угао γ који је суплементан углу β.

Решење. Дакле, дато је $\alpha+\beta = 90^o$ и $2\cdot\alpha+40^o = 180^o$. Из ове друге једнакости добијамо $2\cdot\alpha = 180^o - 40^o = 140^0$, то јест $\alpha = 70^o$. Сада, када ово убацимо у прву једначину, добијамо угао $\beta = 20^o$. Како су β и γ суплементни, то је $\beta+\gamma = 180^o$ односно $20^o+\gamma = 180^o$, а одавде добијамо $\gamma = 180^o - 20^o$, и коначно $\gamma = 160^o$. ♠

▷ 17. Бројилац и именилац разломка $\frac{p}{q}$ су прости бројеви. Одредити просте бројеве p и q ако је збир разломка $\frac{p}{q}$ и њему реципрочног разломка једнак $\frac{130}{33}$.

Решење. Разломак реципрочан разломку $\frac{p}{q}$ је $\frac{q}{p}$. Услов задатка даје

$$\frac{p}{q}+\frac{q}{p} = \frac{130}{33},$$

а ово значи да је НЗС$(p, q) = 33 = 3 \cdot 11$, и отуда добијамо да су $p = 3$, $q = 11$, а провером добијамо

$$\frac{3}{11}+\frac{11}{3} = \frac{9+121}{33} = \frac{130}{33}.$$

што је потврда да смо нашли право решење. ♠

▷ 18. Угао α једнак је збиру свог комплементног угла и своје три четвртине. Који је то угао?

Решење. Запишимо ову релацију прецизније: $\alpha = (90^o - \alpha) + \frac{3}{4}\cdot\alpha$.
Одавде добијамо $\alpha+\alpha-\frac{3}{4}\cdot\alpha = 90^o$ и $2\cdot\alpha-\frac{3}{4}\cdot\alpha = 90^o$, тј. $\frac{5}{4}\cdot\alpha = 90^o$. Одавде следи да је $\alpha = 72^o$. ♠

▷ 19. Колико има разломака једнаких $\frac{1}{3}$, чији бројилац и именилац су природни бројеви, а чији је именилац мањи од 55?

Решење. Једнаки ће бити сви они разломци који када се скрате дају $\frac{1}{3}$. Нпр. $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{9}$,... А да би био испуњен услов да именилац буде мањи од 55, то значи да ћемо узети оне разломке чији имениоци су бројеви дељиви са три, и мањи од 55. Природних бројева који су дељиви са 3 а мањи од 55 има 18, искључимо ли тројку која је већ "урачуната" у разломак $\frac{1}{3}$, добијамо да је тражено решење 17. ♠

▷ 20. На једном семафору зелено светло се пали на сваких 60 секунди, а на другом на сваких 45 секунди. Ако је познато да је у 10 часова на оба семафора истовремено упаљено зелено светло, одредите у које време ће се следећи пут опет упалити зелена светла истовремено на ова два семафора. Да ли ће у 12 сати и 3 минута бити упаљено зелено светло на оба семафора?

Решење. НЗС$(45, 60) = 180$, па ће се зелено светло наредни пут истовремено упалити у 10 часова и 3 минута. Пошто се истовремено паљење зеленог светла на ова два семафора дешава на сваких 3 минута, то ће се оно сигурно дешавати и на сваки пун сат (60 дељиво са 3) , а отуда добијамо да ће бити истовремено упаљено и у 12 сати и 3 минута. ♠